

Difféomorphismes partiellement hyperboliques

De quoi s'agit-il ? On a vu qu'une dynamique est hyperbolique si en tout point l'espace tangent est la somme des direction uniformément contractées (espace stable) et de celles uniformément dilatées (espace instable).

Un système est dit « partiellement hyperbolique » si l'espace en tout point l'espace tangent est la somme de l'espace stable (vecteurs uniformément contracté) de l'espace instable (vecteurs uniformément dilatés) et d'un espace central où les vecteurs peuvent être contracté ou dilaté mais sont uniformément moins contractés que ceux de l'espace stable et uniformément moins dilatés que ceux de l'espace instable. ... Il y a beaucoup de structures partiellement hyperboliques en fonctions des dimensions respectives des espaces stable central et instable.

Les exemples typiques sont

- le temps 1 d'un flot d'Anosov,
- le produit fibré d'un difféomorphisme d'Anosov par des rotations
- un difféomorphisme linéaire d'Anosov ayant une valeur propre plus proche de 1 que les deux autres.

L'étude de ces systèmes est devenue importante en particulier dans les années 1990/ 2000 par une suites de résultats dans deux directions différentes mais de même saveurs :

- en théorie ergodique, ils ont fournis les premiers exemples de dynamique « stablement ergodiques » : il s'agit de difféomorphisme préservant le volume et tels que la forme de volume reste ergodique pour toute perturbation préservant le volume.
- en dynamique topologique, ils ont fournis les premiers exemples de systèmes « robustement transitifs » : il s'agit de difféomorphismes dont tous les perturbations restent transitifs (ont des orbites denses dans la variété).

Réciproquement nous avons montré (Diaz Pujals Ures en dimension 3 puis [BDP2003] en toute dimension) que

Théorème *Tout système robustement transitif admet une structure partiellement hyperbolique.*

Les difféomorphismes partiellement hyperboliques ont été étudiés

- pour des propriétés globales en toute dimension : transitivité robuste [BD1996](à l'aide de blenders) , ergodicité stable
- pour leur propriétés globales, sur les variétés de dimension 3, en supposant 3 fibrés de dimension 1. La question essentielle est de savoir s'ils sont *comparable d'une façon ou d'une autre* à l'un des exemples modèles. La première notion de comparable s'appelait « conjugaison des feuilles centrale » et a été infirmé par une suite d'exemples (par Hertz Hertz Ures puis par Potrie Gogolev et moi &co voir ci dessous [BGP2016][BPP2016][BGHP2020])
- pour des propriétés ergodiques semi-globale : existence de mesure attractante (mesures SRB pour Sinais Ruelle Bowen) voir [ABV2000] et [BV2000]
- pour des propriétés locales essentiellement des propriétés ergodiques : caractérisation de la non hyperbolicité par l'existence de mesures non-hyperboliques, approximation des mesures par des orbites périodiques , etc. avec l'utilisation des Blenders de façon essentielle.

Mes publications dans ces sujets :

1. Bonatti, Christian; Diaz, Lorenzo J.; Gelfert, Katrin *Heterodimensional cycles of hyperbolic ergodic measures*. ArXiv:2405.12686 Preprint, arXiv:2405.12686 (2024).
2. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *Aperiodic chain recurrence classes of C^1 -generic diffeomorphisms*. Preprint, arXiv:2209.13249 (2022).
3. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *A mechanism for ejecting a horseshoe from a partially hyperbolic chain recurrence class*. ArXiv:2209.13245 **Ergodic Theory and Dynamical Systems**. Published online 2023:1-63. doi:10.1017/etds.2023.76
4. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Kwietniak, Dominik *Robust existence of nonhyperbolic ergodic measures with positive entropy and full support*. **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.** (5) 22, No. 4, 1643-1672 (2021).
5. Bonatti, Christian; Eskin, Alex; Wilkinson, Amie *Projective cocycles over $SL(2, \mathbb{R})$ actions: measures invariant under the upper triangular group*. Crovisier, Sylvain (ed.) et al., Some aspects of the theory of dynamical systems: a tribute to Jean-Christophe Yoccoz. Volume I. Paris: Société Mathématique de France (SMF). **Astérisque** 415, 157-180 (2020).
6. Bonatti, Christian; Gogolev, Andrey; Hammerlindl, Andy; Potrie, Rafael *Anomalous partially hyperbolic diffeomorphisms. III: Abundance and incoherence*. **Geom. Topol.** 24, No. 4, 1751-1790 (2020).
7. Bonatti, Christian; Zhang, Jinhua *Transitive partially hyperbolic diffeomorphisms with one-dimensional neutral center*. **Sci. China, Math.** 63, No. 9, 1647-1670 (2020).
8. Bonatti, Christian; Gómez-Mont, Xavier; Martínez, Matilde *Foliated hyperbolicity and foliations with hyperbolic leaves*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 40, No. 4, 881-903 (2020).
9. Bonatti, Christian; Zhang, Jinhua *On the existence of non-hyperbolic ergodic measures as the limit of periodic measures*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 39, No. 11, 2932-2967 (2019).
10. Bonatti, Christian; Zhang, Jinhua *Periodic measures and partially hyperbolic homoclinic classes*. **Trans. Am. Math. Soc.** 372, No. 2, 755-802 (2019).
11. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Bochi, Jairo *A criterion for zero averages and full support of ergodic measures*. **Mosc. Math. J.** 18, No. 1, 15-61 (2018).
12. Bochi, Jairo; Bonatti, Christian; Gelfert, Katrin *Dominated Pesin theory: convex sum of hyperbolic measures*. **Isr. J. Math.** 226, No. 1, 387-417 (2018).
13. Bonatti, Christian; Potrie, Rafael *Many intermingled basins in dimension 3*. **Isr. J. Math.** 224, 293-314 (2018).
14. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *Volume hyperbolicity and wildness*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 38, No. 3, 886-920 (2018).
15. Bonatti, Christian; Zhang, Jinhua *Transverse foliations on the torus \mathbb{T}^2 and partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds*. **Comment. Math. Helv.** 92, No. 3, 513-550 (2017).
16. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Center manifolds for partially hyperbolic sets without strong unstable connections*. **J. Inst. Math. Jussieu** 15, No. 4, 785-828 (2016).

17. Bonatti, Christian; Parwani, Kamlesh; Potrie, Rafael *Anomalous partially hyperbolic diffeomorphisms. I: Dynamically coherent examples.* **Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.** (4) 49, No. 6, 1387-1402 (2016).
18. Bonatti, Ch.; Crovisier, S.; Díaz, L. J.; Wilkinson, A. What is ...a blender? **Notices Am. Math. Soc.** 63, No. 10, 1175-1178 (2016).
19. Bonatti, Christian; Gogolev, Andrey; Potrie, Rafael *Anomalous partially hyperbolic diffeomorphisms. II: Stably ergodic examples.* **Invent. Math.** 206, No. 3, 801-836 (2016).
20. Bochi, Jairo; Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Robust criterion for the existence of nonhyperbolic ergodic measures.* **Commun. Math. Phys.** 344, No. 3, 751-795 (2016).
21. Bohnet, Doris; Bonatti, Christian *Partially hyperbolic diffeomorphisms with a uniformly compact center foliation: the quotient dynamics.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 36, No. 4, 1067-1105 (2016).
22. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *Flexible periodic points.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 35, No. 5, 1394-1422 (2015).
23. Bonatti, C.; Crovisier, S.; Gourmelon, N.; Potrie, R. *Tame dynamics and robust transitivity chain-recurrence classes versus homoclinic classes.* **Trans. Am. Math. Soc.** 366, No. 9, 4849-4871 (2014).
24. Bochi, Jairo; Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Robust vanishing of all Lyapunov exponents for iterated function systems.* **Math. Z.** 276, No. 1-2, 469-503 (2014).
25. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Shinohara, Katsutoshi *The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory revisited.* **J. Mod. Dyn.** 7, No. 4, 605-618 (2013).
26. Bonatti, Ch.; Crovisier, S.; Díaz, L. J.; Gourmelon, N. *Internal perturbations of homoclinic classes: non-domination, cycles, and self-replication.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 33, No. 3, 739-776 (2013).
27. Bonatti, Christian; Li, Ming; Yang, Dawei *On the existence of attractors.* **Trans. Am. Math. Soc.** 365, No. 3, 1369-1391 (2013).
28. Abdenur, Flavio; Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Nonuniform hyperbolicity for C^1 -generic diffeomorphisms.* **Isr. J. Math.** 183, 1-60 (2011).
29. Bonatti, Christian; Guelman, Nancy *Axiom A diffeomorphisms derived from Anosov flows.* **J. Mod. Dyn.** 4, No. 1, 1-63 (2010).
30. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Gorodetski, Anton *Non-hyperbolic ergodic measures with large support.* **Nonlinearity** 23, No. 3, 687-705 (2010).
31. Bonatti, Christian; Guelman, Nancy *Transitive Anosov flows and Axiom-A diffeomorphisms.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 29, No. 3, 817-848 (2009).
32. Bonatti, Christian; Wilkinson, Amie *Transitive partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds.* **Topology** 44, No. 3, 475-508 (2005). **Anatole Katok on his 60th birthday.** Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 0-521-84073-2/hbk). 299-306 (2004).
33. Bonatti, C.; Viana, M. *Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 24, No. 5, 1295-1330 (2004).

34. Bonatti, Christian; Matheus, Carlos; Viana, Marcelo; Wilkinson, Amie *Abundance of stable ergodicity*. **Comment. Math. Helv.** 79, No. 4, 753-757 (2004).
35. Baraviera, Alexandre T.; Bonatti, Christian *Removing zero Lyapunov exponents*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 23, No. 6, 1655-1670 (2003).
36. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Pujals, Enrique R.; Rocha, Jorge *Robustly transitive sets and heterodimensional cycles*. de Melo, Welington (ed.) et al., **Geometric methods in dynamics (I). Volume in honor of Jacob Palis**. In part papers presented at the international conference on dynamical systems held at IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, July 2000, to celebrate Jacob Palis' 60th birthday. Paris: Société Mathématique de France (ISBN 2-85629-138-4/pbk). **Astérisque 286**, 187-222 (2003).
37. Bonatti, C.; Díaz, L. J.; Pujals, E. R. *A C^1 -generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks of sources*. **Ann. Math.** (2) 158, No. 2, 355-418 (2003).
38. Bonatti, Christian; Gómez-Mont, Xavier; Viana, Marcelo *Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices*. **Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire** 20, No. 4, 579-624 (2003).
39. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Ures, Raúl *Minimality of strong stable and unstable foliations for partially hyperbolic diffeomorphisms*. **J. Inst. Math. Jussieu** 1, No. 4, 513-541 (2002).
40. Bonatti, Christian; Gómez-Mont, Xavier *Sur le comportement statistique des feuilles de certains feuilletages holomorphes*. Ghys, Étienne (ed.) et al., *Essays on geometry and related topics. Mémoires dédiés à André Haefliger*. Vol. 1. Genève: **L'Enseignement Mathématique. Monogr. Enseign. Math.** 38, 15-41 (2001).
41. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Turcat, Gaël *Pas de "Shadowing Lemma" pour les dynamiques partiellement hyperboliques*. **C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.** 330, No. 7, 587-592 (2000).
42. Alves, José F.; Bonatti, Christian; Viana, Marcelo *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*. **Invent. Math.** 140, No. 2, 351-398 (2000).
43. Bonatti, Christian; Viana, Marcelo *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting*. **Isr. J. Math.** 115, 157-193 (2000).
44. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms*. **Ann. Math.** (2) 143, No. 2, 357-396 (1996).
45. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo Justiniano; Viana, Marcelo *Discontinuity of the Hausdorff dimension of hyperbolic sets*. **C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I** 320, No. 6, 713-718 (1995)