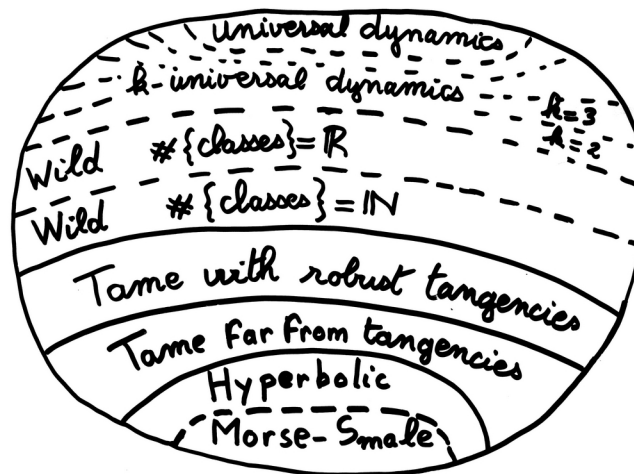


Dynamiques génériques

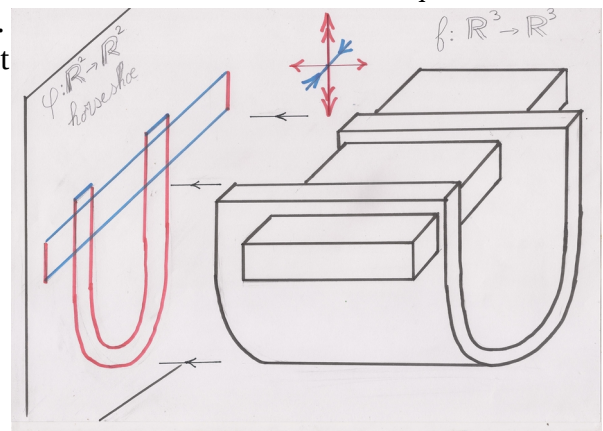
On ne peut pas décrire tous les comportements possibles des dynamiques des difféomorphismes ou des flots: il y en a trop. Mais peut-être les plus complexes sont ils portés par des systèmes très dégénérés. Un peu comme ce qui se passe avec les fonctions de Morse: les points singulier d'une fonction quelconque peuvent être très complexe mais, quitte à se limiter à un ouvert dense de fonction, celle-ci n'ont qu'un ensemble fini de singularité qui sont de plus non dégénérées.

C'est l'approche que Smale avait tenté avec les systèmes hyperboliques, mais qui se sont rapidement avérés ne pas décrire une famille dense. Une grande partie de mes travaux en systèmes dynamiques (57 références ci-dessous) consistent à décrire la dynamique de difféomorphismes dans une partie ouverte et dense, ou générique (intersection d'une famille dénombrable d'ouverts dense) de l'ensemble de tous les systèmes. Pour que cela est un sens, il faut préciser la topologie sur l'espace des difféomorphismes, et mes travaux portent essentiellement sur la topologie C^1 .

Mes travaux (avec de nombreux collaborateurs, Diaz et Crovisier étant les principaux) m'ont permis d'élaborer une cartographie conjecturale d'un ouvert dense de l'espace de tous les difféomorphismes, pour la topologie C^1 . Il s'agit d'un programme ambitieux qui rassemble les résultats déjà obtenu à l'aide d'une vingtaine de conjectures, dont aucune n'a encore été infirmée. (Référence 25 ci-dessous, 2011).



Parmi mes travaux qui ont marqué ce sujet, il y a la définition, la construction et les conséquences des « Blenders » (*mélangeurs* en français) avec Lorenzo Diaz. Ces blenders (référence 56, 1996) sont restés incompris et délaissés par la communauté pendant une dizaine d'années, avant que la communauté s'en empare, les utilisent, les adaptent à d'autre contexte (conservatifs, symplectiques, holomorphes) les généralisent comme la notions de parablenders de Berger. Cela fait partie des notions que j'aurais introduites (pas seul bien sûr) et qui vont s'intégrer dans l'outillage scientifique bien au-delà du sujet initial, et certainement au-delà des mathématiques.



Il y a également la généralisation, avec Crovisier, du « connecting lemma » de Hayashi (2004, référence 42) et qui a permis d'utiliser la théorie de Conley sur les classes de récurrence par chaînes pour les difféomorphismes C^1 -génériques.

Il y a également de nombreux travaux sur les perturbations de la différentielle le long d'orbites périodiques, dans la lignée des travaux de Mañé et Liao, qui permettent de montrer que des notions faibles (mais uniformes) d'hyperbolicité sont nécessaires à l'existence de propriétés robustes (voir en particulier la référence 48 avec Diaz et Pujals, en 2003).

Mes travaux les plus récents ont porté sur la caractérisation des dynamiques non-hyperboliques par l'existence de mesures ayant des exposants de Lyapunov nuls... à l'aide de Blenders. Mon dernier travail, avec Diaz et Gelfert (référence 1), est dans cette lignée.

Signalons enfin le livre *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective* avec Diaz et Viana, qui a donné son nom *Dynamics beyond uniform hyperbolicity* à une longue série de Conférences.

Liste de mes publications pour l'étude des propriétés C^1 -robustes ou génériques.

1. Bonatti, Christian; Diaz, Lorenzo J.; Gelfert, Katrin *Heterodimensional cycles of hyperbolic ergodic measures*. ArXiv:2405.12686 Preprint, arXiv:2405.12686 (2024).
2. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *Aperiodic chain recurrence classes of C^1 -generic diffeomorphisms*. Preprint, arXiv:2209.13249 (2022).
3. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *A mechanism for ejecting a horseshoe from a partially hyperbolic chain recurrence class*. ArXiv:2209.13245 **Ergodic Theory and Dynamical Systems**. Published online 2023:1-63. doi:10.1017/etds.2023.76
4. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Kwietniak, Dominik *Robust existence of nonhyperbolic ergodic measures with positive entropy and full support*. **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa**, Cl. Sci. (5) 22, No. 4, 1643-1672 (2021).
5. Bonatti, Christian; Zhang, Jinhua *On the existence of non-hyperbolic ergodic measures as the limit of periodic measures*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 39, No. 11, 2932-2967 (2019).
6. Bonatti, Christian; Zhang, Jinhua *Periodic measures and partially hyperbolic homoclinic classes*. **Trans. Am. Math. Soc.** 372, No. 2, 755-802 (2019).
7. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Bochi, Jairo *A criterion for zero averages and full support of ergodic measures*. **Mosc. Math. J.** 18, No. 1, 15-61 (2018).
8. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *Volume hyperbolicity and wildness*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 38, No. 3, 886-920 (2018).
9. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Center manifolds for partially hyperbolic sets without strong unstable connections*. **J. Inst. Math. Jussieu** 15, No. 4, 785-828 (2016).
10. Bonatti, Ch.; Crovisier, S.; Díaz, L. J.; Wilkinson, A. *What is ...a blender?* **Notices Am. Math. Soc.** 63, No. 10, 1175-1178 (2016).
11. Bochi, Jairo; Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Robust criterion for the existence of nonhyperbolic ergodic measures*. **Commun. Math. Phys.** 344, No. 3, 751-795 (2016).

12. Bonatti, Christian; Shinohara, Katsutoshi *Flexible periodic points*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 35, No. 5, 1394-1422 (2015).
13. Bonatti, Christian; Gan, Shaobo; Yang, Dawei *Dominated chain recurrent class with singularities*. (English) **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa**, Cl. Sci. (5) 14, No. 1, 83-99 (2015).
14. Bonatti, C.; Crovisier, S.; Gourmelon, N.; Potrie, R. *Tame dynamics and robust transitivity chain-recurrence classes versus homoclinic classes*. **Trans. Am. Math. Soc.** 366, No. 9, 4849-4871 (2014).
15. Bochi, Jairo; Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Robust vanishing of all Lyapunov exponents for iterated function systems*. **Math. Z.** 276, No. 1-2, 469-503 (2014).
16. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Shinohara, Katsutoshi *The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory revisited*. **J. Mod. Dyn.** 7, No. 4, 605-618 (2013).
17. Bonatti, Christian; Li, Ming; Yang, Dawei *A robustly chain transitive attractor with singularities of different indices*. **J. Inst. Math. Jussieu** 12, No. 3, 449-501 (2013).
18. Bonatti, Ch.; Crovisier, S.; Díaz, L. J.; Gourmelon, N. *Internal perturbations of homoclinic classes: non-domination, cycles, and self-replication*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 33, No. 3, 739-776 (2013).
19. Bonatti, Christian; Li, Ming; Yang, Dawei *On the existence of attractors*. **Trans. Am. Math. Soc.** 365, No. 3, 1369-1391 (2013).
20. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Abundance of C^1 -robust homoclinic tangencies*. **Trans. Am. Math. Soc.** 364, No. 10, 5111-5148 (2012).
21. Bochi, J.; Bonatti, C. *Perturbation of the Lyapunov spectra of periodic orbits*. **Proc. Lond. Math. Soc.** (3) 105, No. 1, 1-48 (2012).
22. Bonatti, C.; Díaz, L. J.; Kiriki, S. *Stabilization of heterodimensional cycles*. **Nonlinearity** 25, No. 4, 931-960 (2012).
23. Bonatti, Ch.; Díaz, L. J. *Fragile cycles*. **J. Differ. Equations** 252, No. 7, 4176-4199 (2012).
24. Abdenur, Flavio; Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Nonuniform hyperbolicity for C^1 -generic diffeomorphisms*. **Isr. J. Math.** 183, 1-60 (2011).
25. Bonatti, C. *Towards a global view of dynamical systems, for the C^1 -topology*. **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 31, No. 4, 959-993 (2011).
26. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Gorodetski, Anton *Non-hyperbolic ergodic measures with large support*. **Nonlinearity** 23, No. 3, 687-705 (2010).
27. Bonatti, Christian; Gan, Shaobo; Yang, Dawei *On the hyperbolicity of homoclinic classes*. **Discrete Contin. Dyn. Syst.** 25, No. 4, 1143-1162 (2009).
28. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Wilkinson, Amie *The C^1 -generic diffeomorphism has trivial centralizer*. **Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.** 109, 185-244 (2009).
29. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Vago, Gioia M.; Wilkinson, Amie *Local density of diffeomorphisms with large centralizers*. **Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.** (4) 41, No. 6, 925-954 (2008).

30. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Wilkinson, Amie C^1 -generic conservative diffeomorphisms have trivial centralizer. **J. Mod. Dyn.** 2, No. 2, 359-373 (2008).
31. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Robust heterodimensional cycles and C^1 -generic dynamics.* **J. Inst. Math. Jussieu** 7, No. 3, 469-525 (2008).
32. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Fisher, Todd *Super exponential growth of the number of periodic orbits inside homoclinic classes.* **Discrete Contin. Dyn. Syst.** 20, No. 3, 589-604 (2008).
33. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Wilkinson, Amie The centralizer of a C^1 -generic diffeomorphism is trivial. **Electron. Res. Announc. Math. Sci.** 15, 33-43 (2008).
34. Bonatti, Christian; Gan, Shaobo; Wen, Lan *On the existence of non-trivial homoclinic classes.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 27, No. 5, 1473-1508 (2007).
35. Abdenur, F.; Bonatti, Ch.; Crovisier, S.; Díaz, L. J.; Wen, L. *Periodic points and homoclinic classes.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 27, No. 1, 1-22 (2007).
36. Bonatti, Christian; Gourmelon, Nikolas; Vivier, Thérèse *Perturbations of the derivative along periodic orbits.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 26, No. 5, 1307-1337 (2006).
37. Abdenur, Flavio; Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Global dominated splittings and the C^1 -Newhouse phenomenon.* **Proc. Am. Math. Soc.** 134, No. 8, 2229-2237 (2006).
38. Abdenur, Flavio; Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain; Díaz, Lorenzo J. *Generic diffeomorphisms on compact surfaces.* **Fundam. Math.** 187, No. 2, 127-159 (2005).
39. Arnaud, Marie-Claude; Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Generic symplectic dynamics.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 25, No. 5, 1401-1436 (2005).
40. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Viana, Marcelo *Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective.* **Encyclopaedia of Mathematical Sciences** 102. Mathematical Physics 3. Berlin: Springer (ISBN 3-540-22066-6/hbk). xviii, 384 p. (2005).
41. Bonatti, C.; Viana, M. *Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 24, No. 5, 1295-1330 (2004).
42. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Recurrence and genericity.* (Récurrence et généricité.) (French. English summary) **Invent. Math.** 158, No. 1, 33-104 (2004).
43. Bonatti, Christian; Matheus, Carlos; Viana, Marcelo; Wilkinson, Amie *Abundance of stable ergodicity.* **Comment. Math. Helv.** 79, No. 4, 753-757 (2004).
44. Abdenur, Flavio; Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Non-wandering sets with non-empty interiors.* **Nonlinearity** 17, No. 1, 175-191 (2004).
45. Bonatti, Christian *Generic dynamics: hyperbolicity and transitivity.* (Dynamiques génériques: hyperbolicité et transitivité.) (French) **Bourbaki seminar**. Volume 2001/2002. Exposes 894–908. Paris: Société Mathématique de France (ISBN 2-85629-149-X/pbk). **Astérisque** 290, 225-242, Exp. No. 904 (2003).
46. Baraviera, Alexandre T.; Bonatti, Christian *Removing zero Lyapunov exponents.* **Ergodic Theory Dyn. Syst.** 23, No. 6, 1655-1670 (2003).

47. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Pujals, Enrique R.; Rocha, Jorge *Robustly transitive sets and heterodimensional cycles*. de Melo, Wellington (ed.) et al., **Geometric methods in dynamics (I). Volume in honor of Jacob Palis**. In part papers presented at the international conference on dynamical systems held at IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, July 2000, to celebrate Jacob Palis' 60th birthday. Paris: Société Mathématique de France (ISBN 2-85629-138-4/pbk). **Astérisque 286**, 187-222 (2003).
48. Bonatti, C.; Díaz, L. J.; Pujals, E. R. *A C^1 -generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks of sources*. **Ann. Math.** (2) 158, No. 2, 355-418 (2003).
49. Bonatti, Christian; Crovisier, Sylvain *Recurrence and genericity*. **C. R., Math., Acad. Sci. Paris** 336, No. 10, 839-844 (2003).
50. Bonatti, Christian; Gómez-Mont, Xavier; Viana, Marcelo *Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices*. **Ann. Inst. Henri Poincaré**, Anal. Non Linéaire 20, No. 4, 579-624 (2003).
51. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Ures, Raúl *Minimality of strong stable and unstable foliations for partially hyperbolic diffeomorphisms*. **J. Inst. Math. Jussieu** 1, No. 4, 513-541 (2002).
52. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms*. **Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.** 96, 171-197 (2002).
53. Bonatti, C. *C^1 -generic dynamics: Tame and wild behaviour*. Li, Ta Tsien (ed.) et al., **Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2002**, Beijing, China, August 20–28, 2002. Vol. III: Invited lectures. Beijing: Higher Education Press; Singapore: World Scientific/distributor (ISBN 7-04-008690-5/3 vol. Set). 265-277 (2002).
54. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J.; Turcat, Gaël *Pas de "Shadowing Lemma" pour les dynamiques partiellement hyperboliques*. **C. R. Acad. Sci., Paris**, Sér. I, Math. 330, No. 7, 587-592 (2000).
55. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo *Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits et de sources*. **Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.** (4) 32, No. 1, 135-150 (1999).
56. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo J. *Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms*. **Ann. Math.** (2) 143, No. 2, 357-396 (1996).
57. Bonatti, Christian; Díaz, Lorenzo Justiniano; Viana, Marcelo *Discontinuity of the Hausdorff dimension of hyperbolic sets*. **C. R. Acad. Sci.**, Paris, Sér. I 320, No. 6, 713-718 (1995).