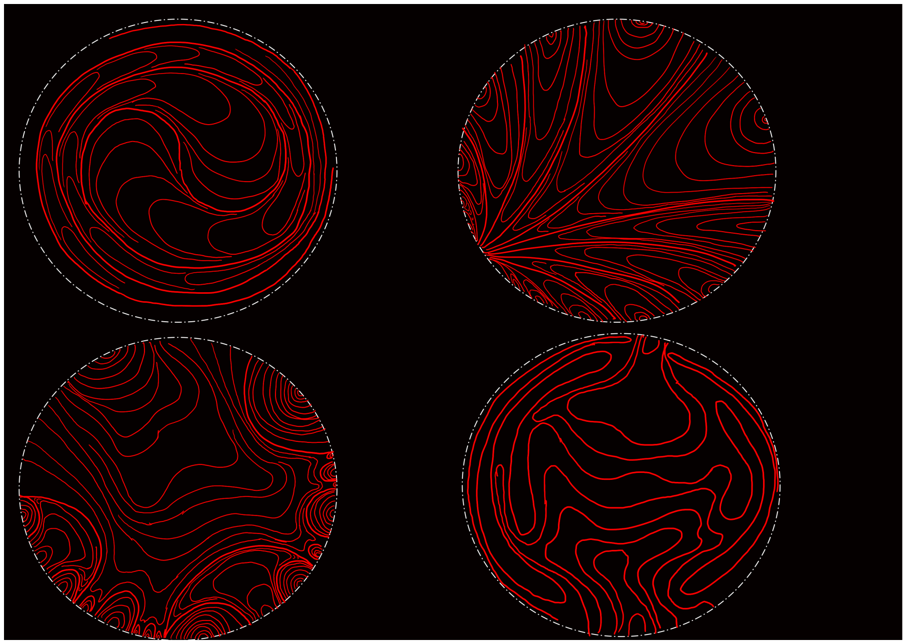
Feuilletages, dynamiques commutatives,
et actions de groupes sur la droite et le cercle.



De ma première période feuilletage (84-93) on peut retenir principalement trois résultats:

Théorème *Pour toute surface compacte S de caractéristique d'Euler non-nulle, il existe un voisinage de l'identité pour la C1-topologie tel que deux difféomorphismes commutants dans ce voisinage possèdent toujours un point fixe commun.*

(voir les articles 14 et 17 ci-dessous) Ce résultat (n'utilisant que des techniques très élémentaires) résolvait une conjecture (vieille de 15 ans), de Harold Rosenberg. Du fait de son côté élémentaire, il a servi a beaucoup de mémoirs de Master, un peu partout dans le monde. Il a été immédiatement généralisé (de façon non-élémentaire) par M. Handel en utilisant de façon fine la théorie de Thurston (pseudo-Anosov).

Théorème *Soit F un feuilletage défini par une fibration dont la base est une variété compacte de caractéristique d'Euler non-nulle, et la fibre une variété compacte de premier groupe d'homologie réelle égal à* ***R****. Alors il existe un voisinage de F pour la C1-topologie du feuilletage défini par cette fibration, tel que tout feuilletage dans ce voisinage possède une feuille compacte proche d'une fibre.*

(voir les articles 11, 15,16, 18, 19) Ce résultat mettait fin à une suite de travaux (Thurston, Rosenberg, Langevin,Schweitzer, Druck, Firmo), en résolvant une conjecture de Rosenberg. L'un des outils essentiel vient d'une théorie de déformation, due à André Haefliger, et que nous avons mise au point ensemble (l'article 16).

Voici en mon sens mon meilleur résultat de cette période:

Théorème (voir 12) *Deux champs de vecteurs **R**-analytiques commutants d'une variété de dimension 4, de caractérisque d'Euler non-nulle possèdent toujours un zéro commun.*

Ce résultat, d'énoncé très simple, semblait ouvrir une voie dans un sujet réputé difficile (voir aussi les résultats de Molino et Turiel). Il généralisait un théorème de E. Lima sur les surfaces, et possède une version semi-locale en dimension 3. Les raisons de s'arrêter à la dimension 4 ont l'air purement techniques.

Le désintérêt marqué par la communauté mathématique pour ce dernier résultat qui me semblait être spectaculaire a été l'une des causes de mon changement thématique vers un sujet plus "à la mode", et donc aussi plus actif, les Systèmes Dynamiques .

Il faut aussi citer l'article 10 avec S. Firmo. C'était en quelque sorte mon adieu aux feuilletages : il pose une philosophie, fourmille de résultats, certains ambitieux, d'autres moins, et ne peut être résumé en quelques lignes. Mais un adieu n'est pas toujours définitif!!!

En conclusion, mes résultats de cette période dans ce domaine ont ouvert quelques pistes qui laissent espérer une théorie locale quantitative, type indice de Poincaré-Hopf , pour les feuilles compactes de feuilletages ou les actions de groupes finiment engendrés.

Retour vers les feuilletages et les actions de groupes

Bruno Santiago est venu faire à Dijon avec moi une partie de sa thèse de doctorat, et il réussi à me convaincre de reprendr le problème d'existence de zéro communs pour des champs de vecteurs (C^3) en dimension 3. Sébastien Alvarez s'est joint à nous… nous avons bien avancé (articles 2 et 3 ci-dessous) mais le résultat espéré (la conjecture ci-dessous) nous résiste encore.

Conjecture *Soient* X,Y *deux champs de vecteurs de classe* C^2 *d'une variété* M *de dimension* 3, *qui commutent. Soit* U *un ouvert relativement compact de* M *tel que* Y *ne s'annule pas sur le bord de* U. *L'indice de Poincaré-Hopf de* Y *sur* U *est donc bien défini et on suppose qu'il est non nul. Alors* X *et Y ont un zéro commun dans* U.

Depuis, le problème des actions de groupes en dimension un, et donc aussi les feuilletages de codimension 1, est redevenu un problème très actif, du en grande partie a ses liens avec la géométrie des groupes. Voir les articles 1, 4,5,6,7. Voici un exemple de résultat:

Théorème (Avec Hélène Eynard-Bontemps, 5) *L'espace des actions de classe* C^∞ *de* $\mathbb{Z}^n$ *sur l'intervalle est connexe.*

Liste de mes publications en feuilletages, diffeomorphismes commutants, et actions de groupes en dimension 1

1. Bonatti, Christian; Carnevale, João; Triestino, Michele *Non-locally discrete actions on the circle with at most N fixed points*. **Math. Z.** 307, No. 1, Paper No. 6, 18 p. (2024).

2. Alvarez, Sébastien; Bonatti, Christian; Santiago, Bruno *Existence of common zeros for commuting vector fields on 3-manifolds. II. Solving global difficulties*. **Proc. Lond. Math. Soc.** (3) 121, No. 4, 828-875 (2020).

3. Bonatti, Christian; Santiago, Bruno *Existence of common zeros for commuting vector fields on three manifolds*. **Ann. Inst. Fourier** 67, No. 4, 1741-1781 (2017).

4. Bonatti, C.; Monteverde, Ignacio; Navas, Andres; Rivas, Cristobal *Rigidity for C^1 actions on the interval arising from hyperbolicity. I: Solvable groups*. **Math. Z.** 286, No. 3-4, 919-949 (2017).

5. Bonatti, Christian; Eynard-Bontemps, Hélène *Connectedness of the space of smooth actions of $\mathbb{Z}^n$ on the interval*. **Ergodic Theory Dyn. Syst**. 36, No. 7, 2076-2106 (2016).

6. Bonatti, Christian; Farinelli, Églantine *Centralizers of C^1-contractions of the half line.* **Groups Geom. Dyn.** 9, No. 3, 831-889 (2015).

7. Bonatti, Christian; Guelman, Nancy *Smooth conjugacy classes of circle diffeomorphisms with irrational rotation number*. **Fundam. Math.** 227, No. 2, 129-162 (2014).

8. Bonatti, Christian; Franks, John *A Hölder continuous vector field tangent to many foliations*. Brin, Michael (ed.) et al., **Modern dynamical systems and applications. Dedicated to Anatole Katok on his 60th birthday**. Cambridge: Cambridge University Press (ISBN 0-521-84073-2/hbk). 299-306 (2004).

9. Bonatti, Christian; Gómez-Mont, Xavier *Sur le comportement statistique des feuilles de certains feuilletages holomorphes.* Ghys, Étienne (ed.) et al., Essays on geometry and related topics. Mémoires dédiés à André Haefliger. Vol. 1. Genève: **L'Enseignement Mathématique. Monogr. Enseign. Math.** 38, 15-41 (2001).

10. Bonatti, Christian; Firmo, Sebastião *Feuilles compactes d'un feuilletage générique en codimension 1.*) **Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.** (4) 27, No. 4, 407-461 (1994).

11. Bonatti, C. *Feuilletages proches d'une fibration.* **Ensaios Matemáticos 5**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. v, 250 p. (1993).

12. Bonatti, Christian *Champs de vecteurs analytiques commutants, en dimension 3 ou 4: Existence de zeros communs*. **Bol. Soc. Bras. Mat.**, Nova Sér. 22, No. 2, 215-247 (1992).

13. Bonatti, C.; Langevin, R.; Moussu, R. *Feuilletages de CP(n) : De l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels.* **Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.** 75, 123-134 (1992).

14. Bonatti, Christian *Difféomorphismes commutants des surfaces et stabilité des fibrations en tores*. **Topology 29,** No. 1, 101-126 (1990).

15. Bonatti, Christian *Stabilité de feuilles compactes pour les feuilletages définis par des fibrations.* **Topology 29**, No. 2, 231-245 (1990).

16. Bonatti, C.; Haefliger, A. *Déformations de feuilletages*. **Topology 29**, No. 2, 205-229 (1990).

17. Bonatti, Christian *Un point fixe commun pour des difféomorphismes commutants de S^2* **Ann. Math.** (2) 129, No. 1, 61-69 (1989).

18. Bonatti, Christian; Haefliger, Andre *Perturbations d'un feuilletage donné par une fibration: Existence de feuilles compactes.* **Proc. 15th Braz. Colloq. Math. Poços de Caldas**/Braz. 1985, 567 (1987).

19. Bonatti, Christian *Existence de feuilles compactes pour les feuilletages proches d'une fibration.* **C. R. Acad. Sci.,** Paris, Sér. I 305, 199-202 (1987).

20. Bonatti, Christian *Sur les feuilletages singuliers stables des variétés de dimension trois.* **Comment. Math. Helv.** 60, 429-444 (1985).

21. Bonatti, Christian *Existence de feuilletages singuliers de codimension un à feuilles denses sur les variétés compactes sans bord*. **C. R. Acad. Sci.,** Paris, Sér. I 300, 493-496 (1985).