Christian Bonatti

Vendredi 22 mars 2024

Feuilletages du disque et le cercle à l'infini

0) Qui suis-je ?

je suis mathématicien ...

chercheur au C.N.R.S

centre national de la recherche scientifique.

d'abord « chargé de recherche »

puis « directeur de recherche ».

mon travail

- résoudre des problèmes, publier les solutions, donner des conférences

  135 articles publiés, 4 soumis pour publications

  ≃ 80 collaborateurs dont ≃ 15 femmes.

  voyages : Brésil, Mexique, Chine, USA, ...

- trouver des questions interessantes

- diriger des thèses de doctorat.

  ≃ 20 thèses 13 hommes 7 femmes.

Adriana
Mario 2020
Diego 2021
João 2022
Ioannis septembre 2023
Inti, decembre 2023

administration, burocratie, organisation de seminaires, de colloques, demande de financement ...

1/ <u>Choix du sujet :</u> ce que je fais actuellement :

<u>article</u> : "Action on the circle at infinity of foliations of $\mathbb{R}^2$"
fini d'écrire en janvier 2023, accepté pour publication en janvier 2024.

<u>un article en cours d'écriture</u> avec Thomas Barthelmé (Canada)
Kathryn Mann (États unis)
"Promoting prelaminations"

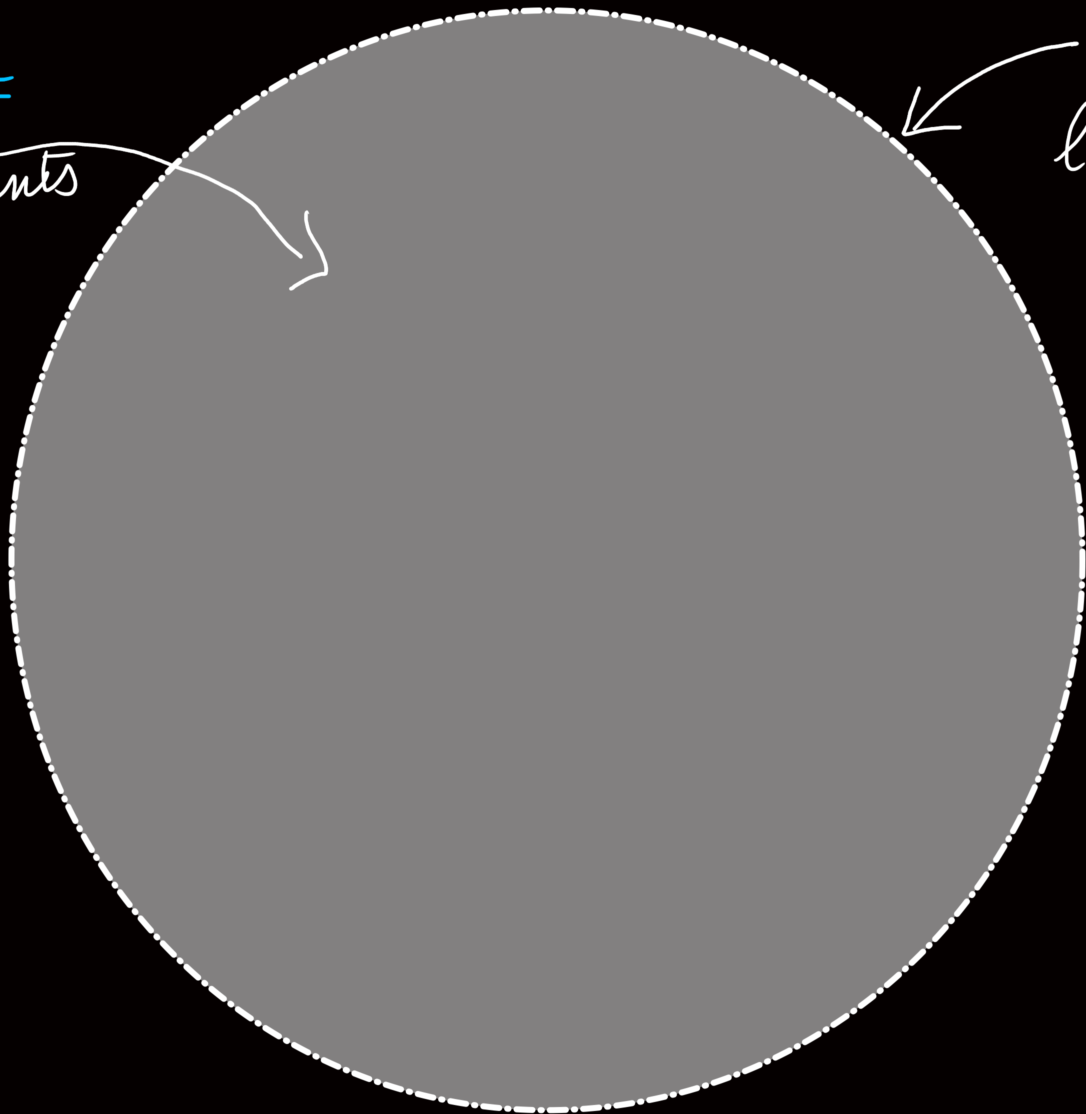
travail présenté en séminaire à Rio (septembre 2023) Mexico (oct 2022
en colloque à Banyuls décembre 2023

2) le sujet « les feuilletages du disque ».

d'abord : le disque.

le disque

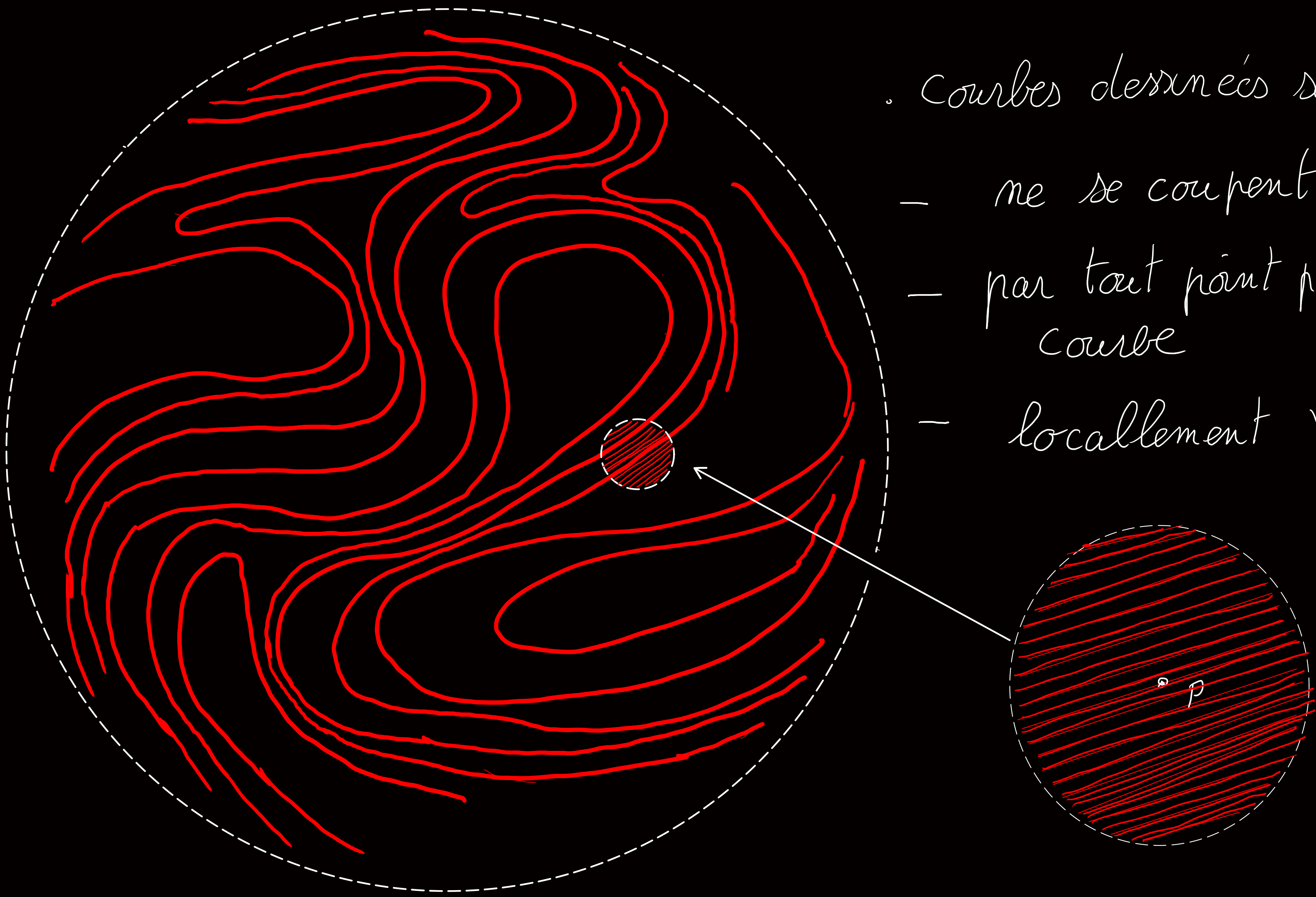
l'ensemble des points à distance plus petite que 1 du centre.



le cercle :

l'ensemble des points à distance 1 du centre.

Un feuilletage, c'est quoi ?



. Courbes dessinées sur le disque

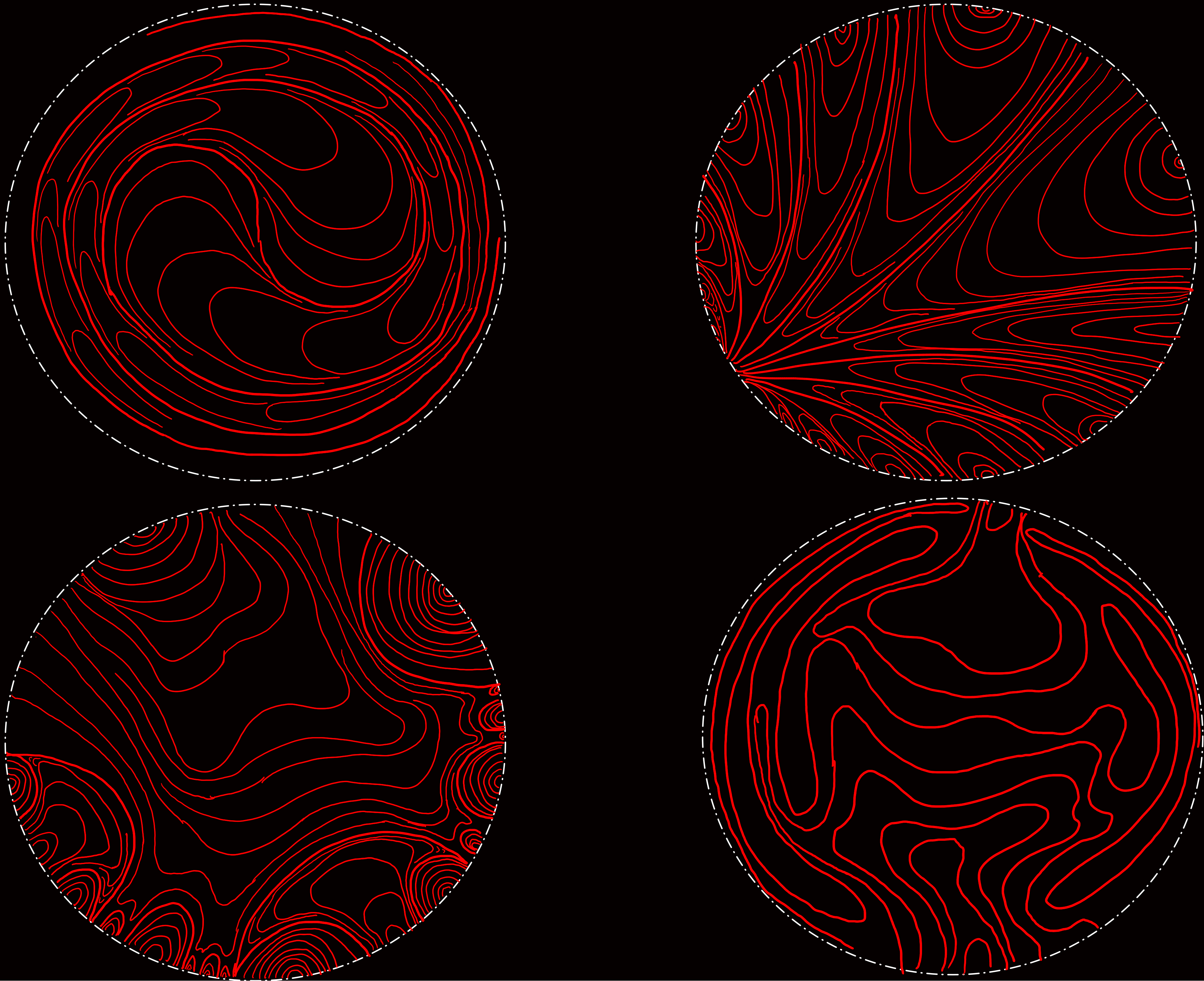
– ne se coupent pas

– par tout point passe une courbe

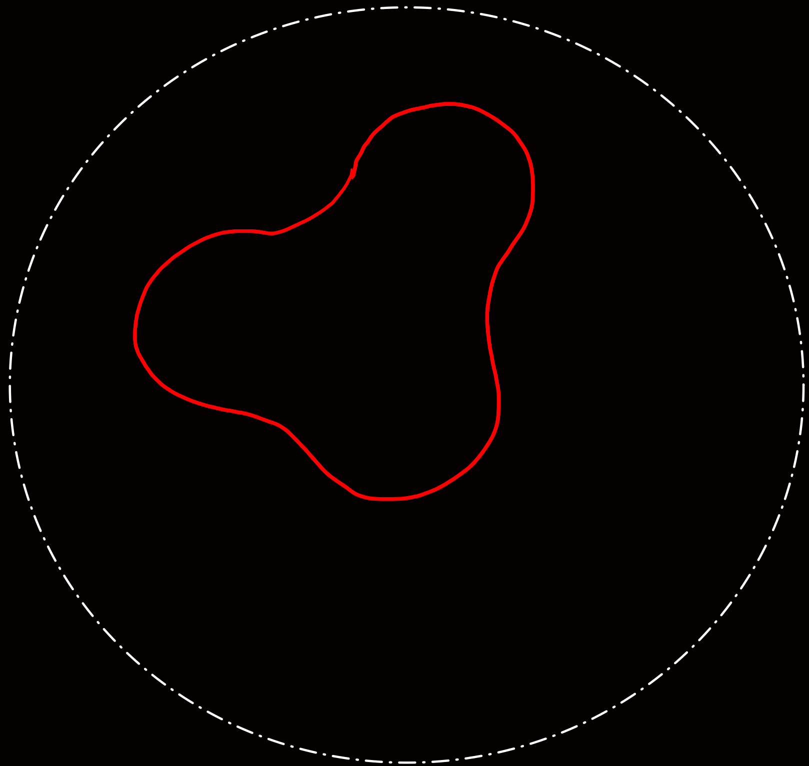
– localement "trivial".

feuilletage

courbes = feuilles



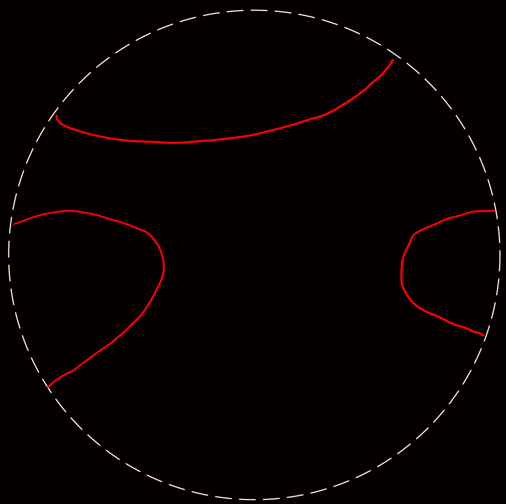
On peut faire n'importe quoi ?



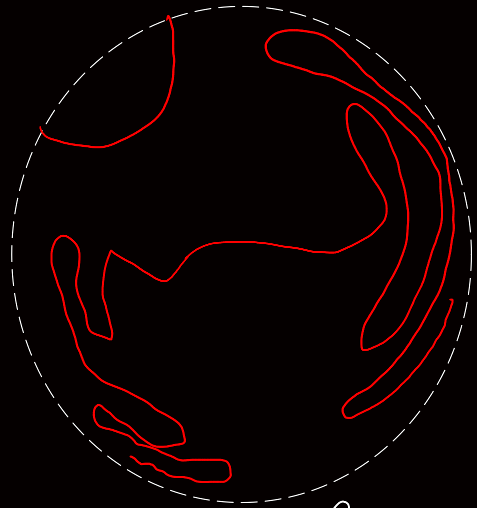
impossible

on ne peut pas compléter
sans singularité
(Poincaré 1881)

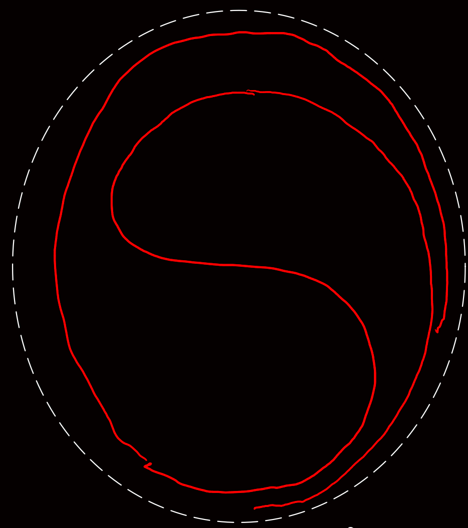
Théorème (H. Poincaré 1881, I. Bendixson 1901) chaque feuille va vers le bord (le cercle S^1) des 2 côtés :



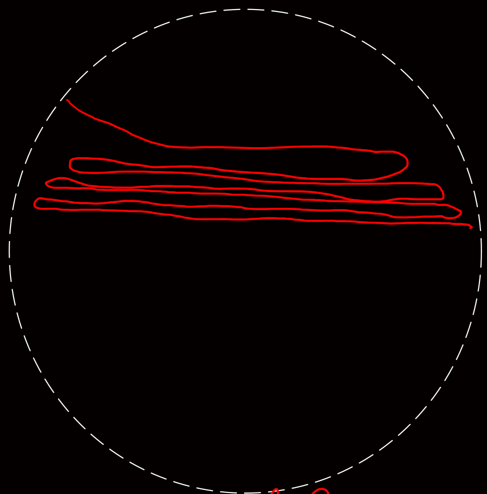
possible



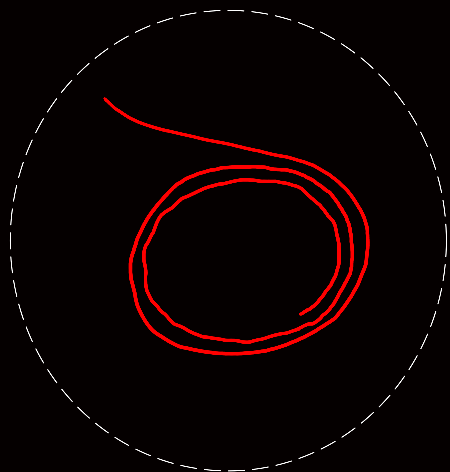
possible



possible

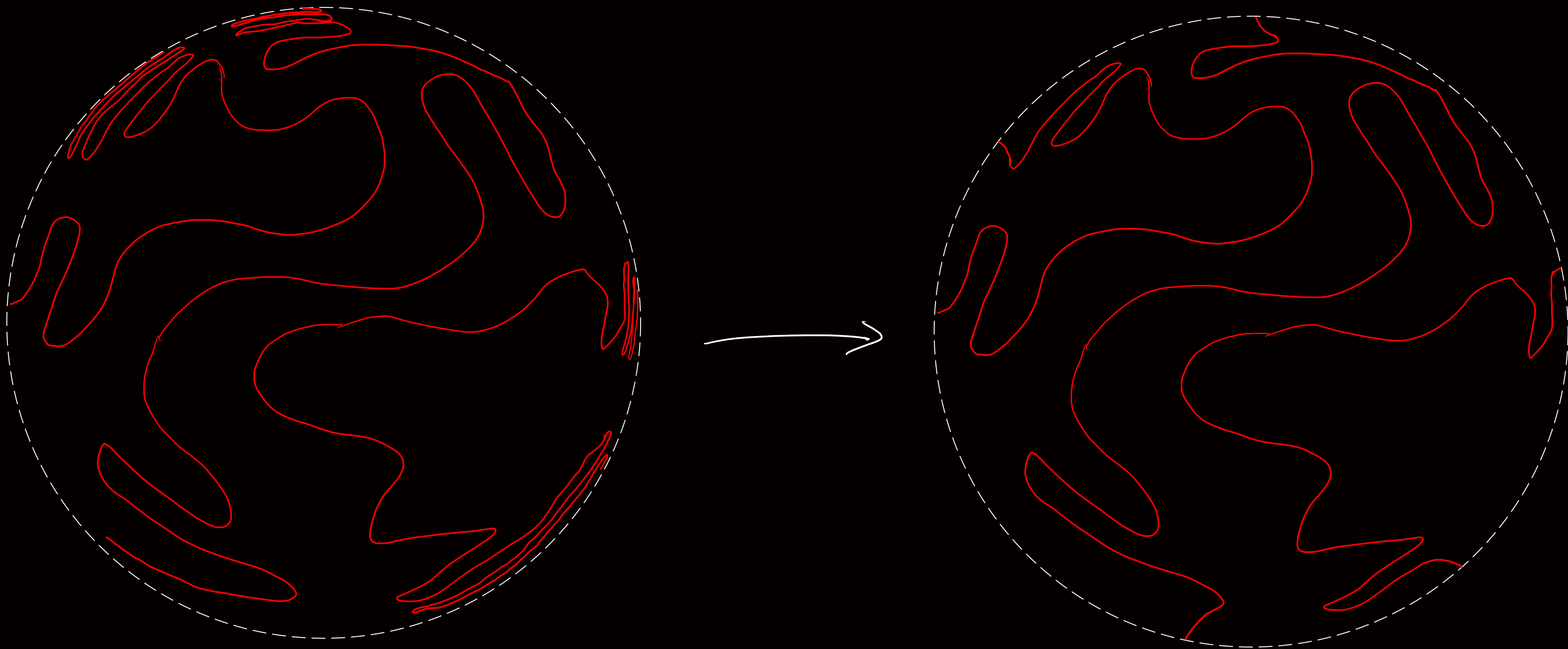


impossible



impossible.

question peut-on redresser les feuilles ?

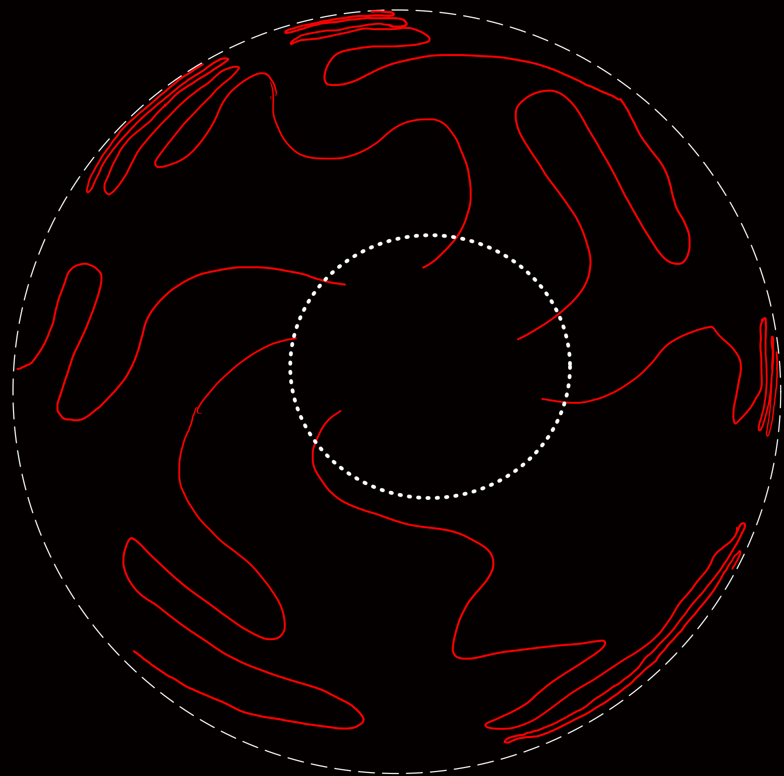


« déformer » le disque pour que toutes les feuilles tendent vers 1 point du cercle

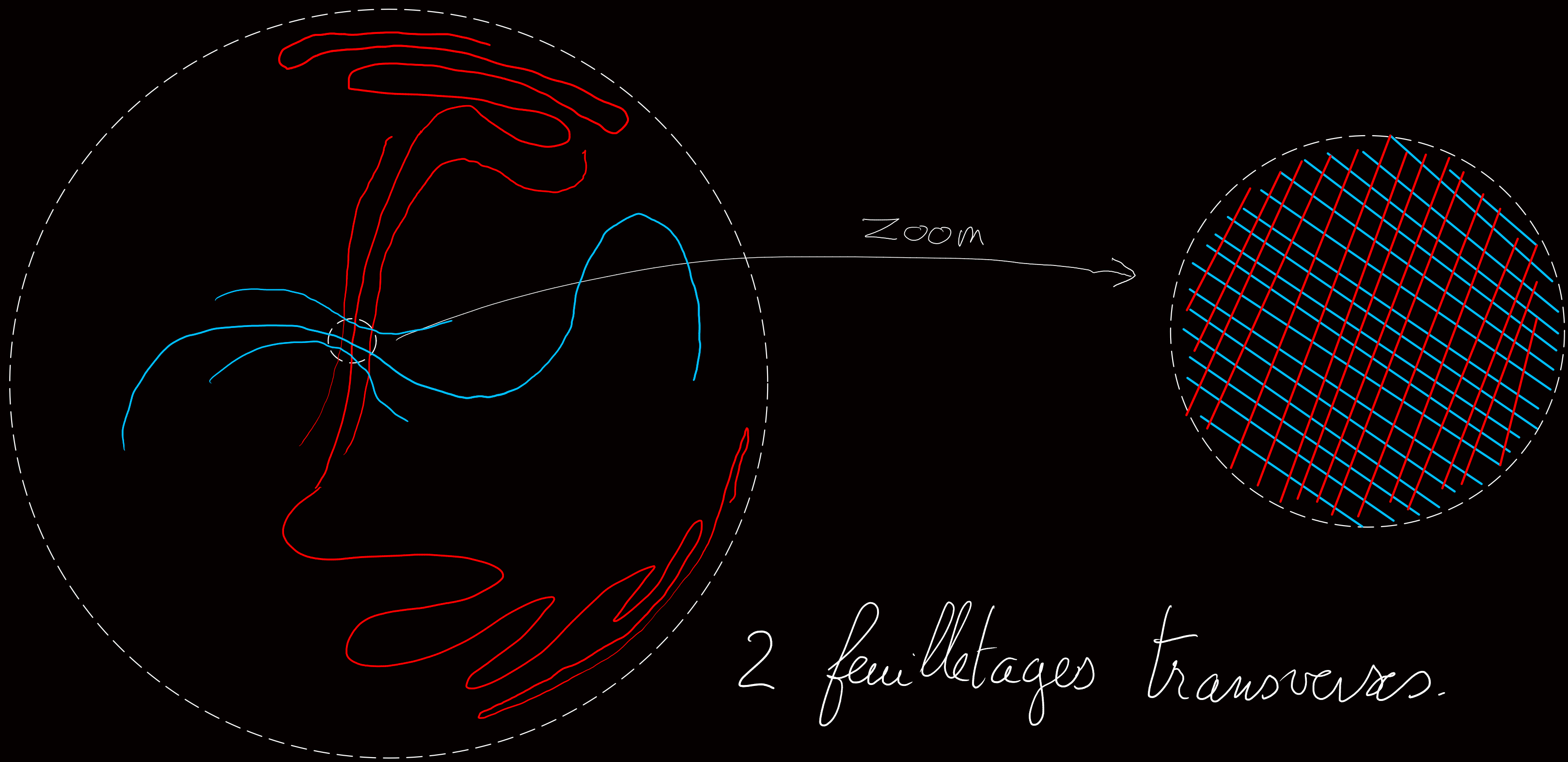
Théorème J. Mather 1982 : c'est possible.

La solution de Mather : il construit un cercle abstrait qu'il recolle sur le disque.

- l'ensemble des $\frac{1}{2}$ feuilles est "ordonné" comme des points sur un cercle.
- il complète cet ensemble cycliquement ordonné en un cercle.
- il recole ce cercle sur le disque



question : peut-on redresser simultanément les feuilles de plusieurs feuilletages transverses ?



2 feuilletages transverses.

Voici le résultat de l'article qui a
été accepté pour publication, en janvier
de cette année, dans son cadre «le plus simple».

Enseign. Math. (2) (submitted)

January 30, 2024

Action on the circle at infinity of foliations of $\mathbb{R}^2$

Christian Bonatti

Abstract. This paper provides a canonical compactification of the plane $\mathbb{R}^2$ by adding a circle at infinity associated to a countable family of singular foliations or laminations (under some hypotheses), generalizing an idea by Mather (1982). Moreover any homeomorphism of $\mathbb{R}^2$ preserving the foliations extends on the circle at infinity.

Then this paper provides conditions ensuring the minimality of the action on the circle at infinity induced by an action on $\mathbb{R}^2$ preserving one foliation or two transverse foliations.

In particular the action on the circle at infinity associated to an Anosov flow X on a closed 3-manifold is minimal if and only if X is non-$\mathbb{R}$-covered.

Mathematics Subject Classification 2020: 37 (primary);
37D20-37E10-37E35-37C86 (secondary).

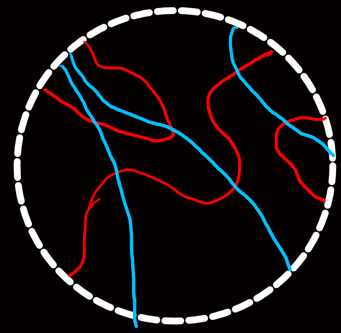
Keywords: Foliation of the plane, Anosov flow, compactification..

Contents

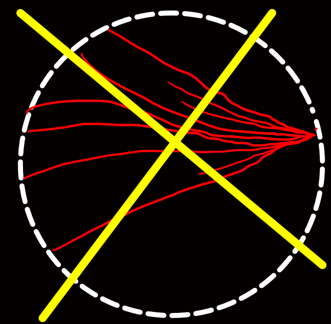
Théorème F, G deux feuilletages transverses du disque

on peut « déformer le disque » de façon que, après déformation.

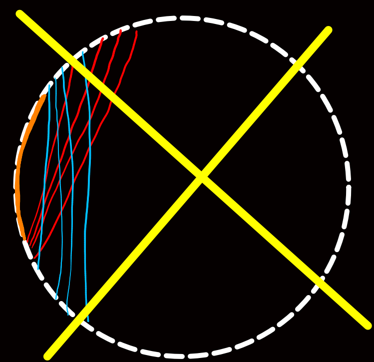
- toute feuille de F ou de G va d'un point du cercle à un autre point du cercle



- on n'a pas tout un paquet de feuilles qui arrivent au même point



- dans tout intervalle du cercle il arrive au moins 1 feuille



ce procédé est unique.

- par rapport à Mather, la nouveauté est qu'on peut "redresser" les 2 feuilletages à la fois.
- on peut en fait redresser "une infinité de feuilletages" à la fois.
- on peut aussi le faire "pour des feuilletages singuliers".
- j'ai prouvé « l'unicité » de la construction.

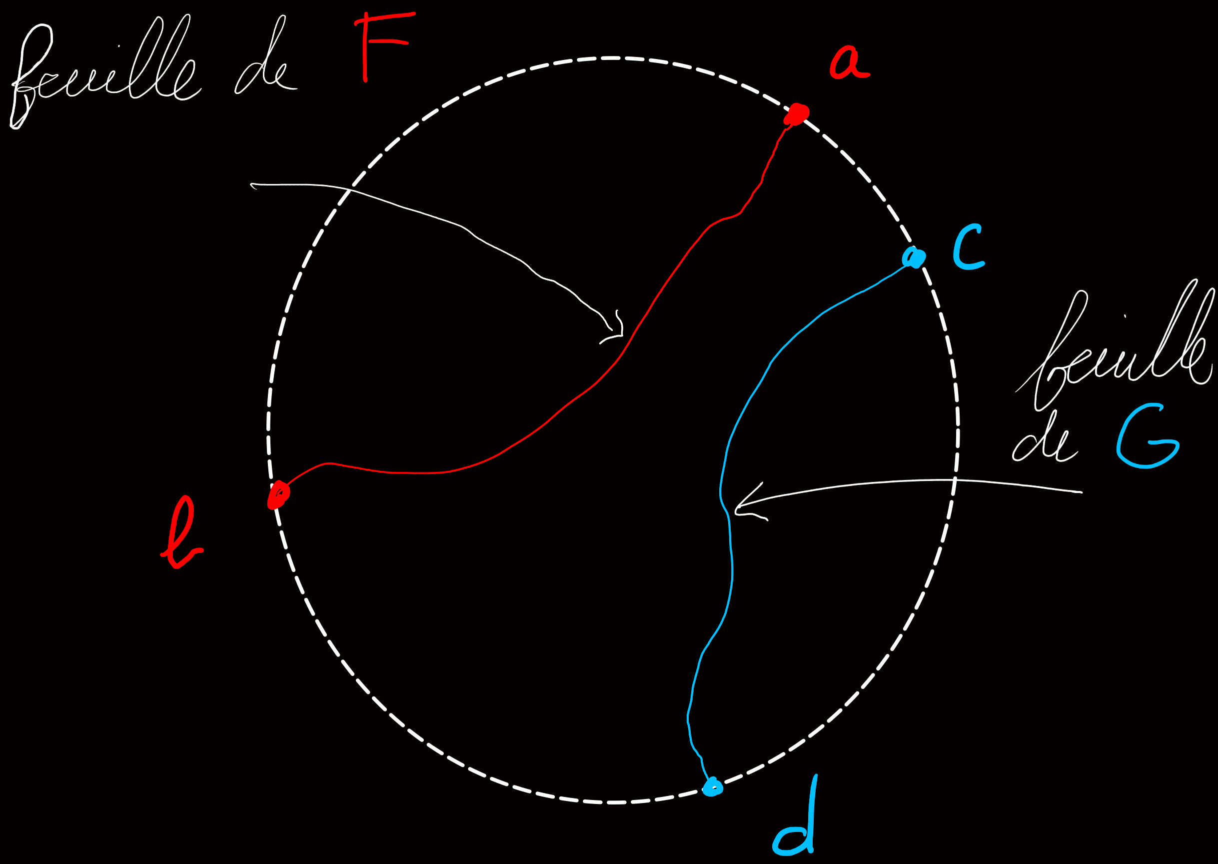
Avec Thomas et Kathryn, nous considérons « la réciproque » de ce théorème.

Question A et B deux familles de paires de points du cercle.
ensembles

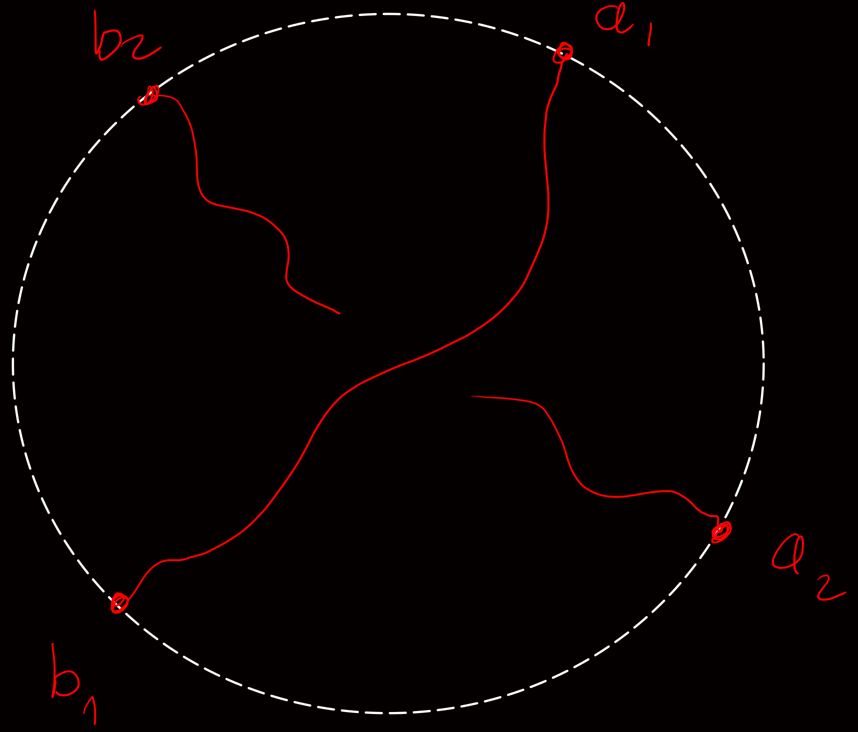
existe-t-il deux feuilletages transverses F et G
tels que :

pour toute paire $\{a, b\}$ de A il existe une feuille de F qui va de a à b

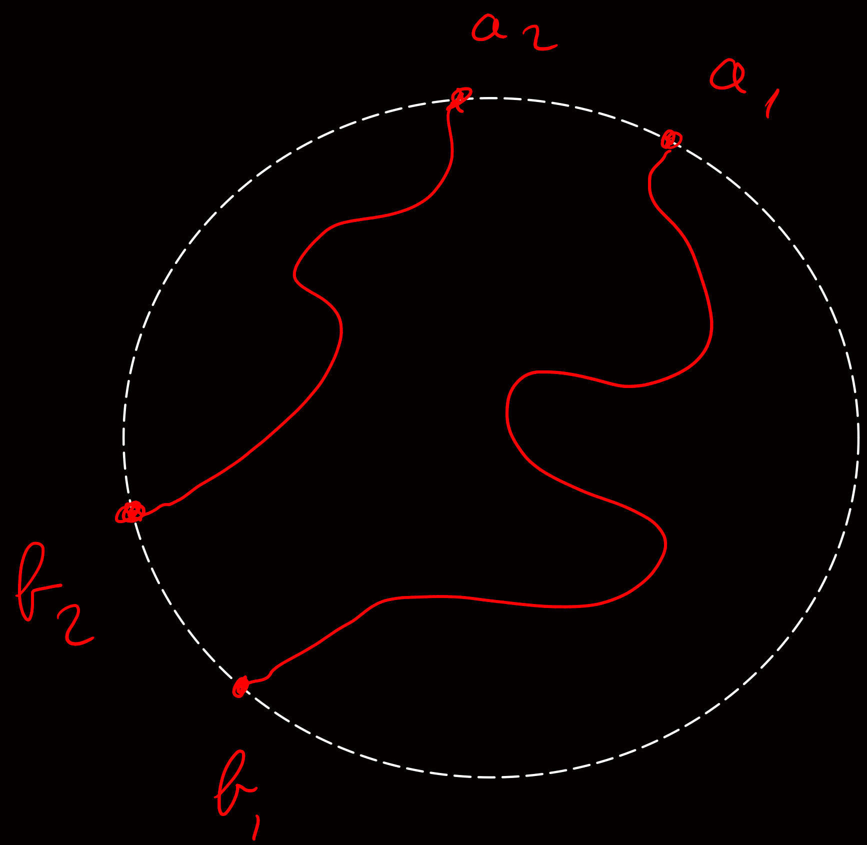
pour toute paire $\{c, d\}$ de B il existe une feuille de G qui va de c à d



il y a des obstructions « évidentes »



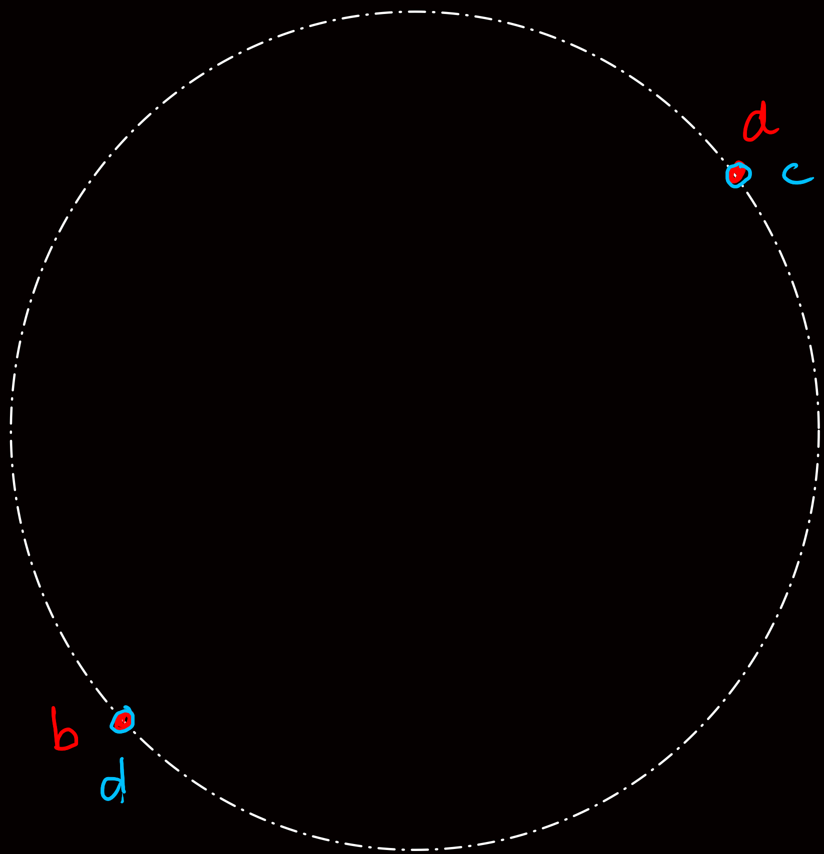
impossible.



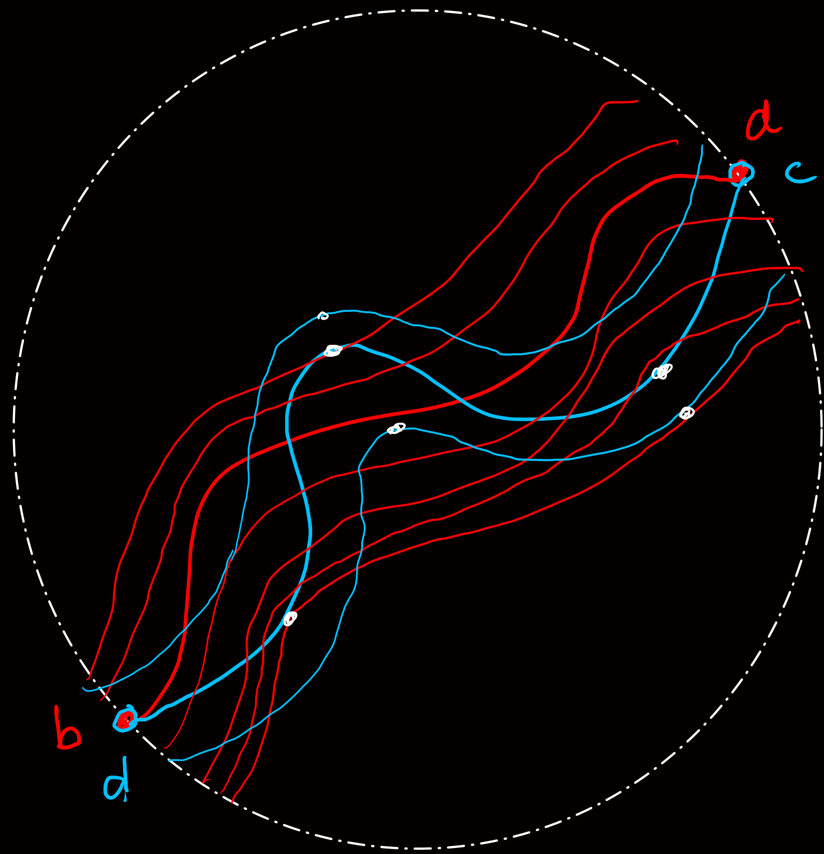
possible.

on dit que la paire $\{a_1, b_1\}$ **croise** la paire $\{a_2, b_2\}$

Les familles A et B doivent être disjointes



$a = c$
$b = d$



points de tangence :

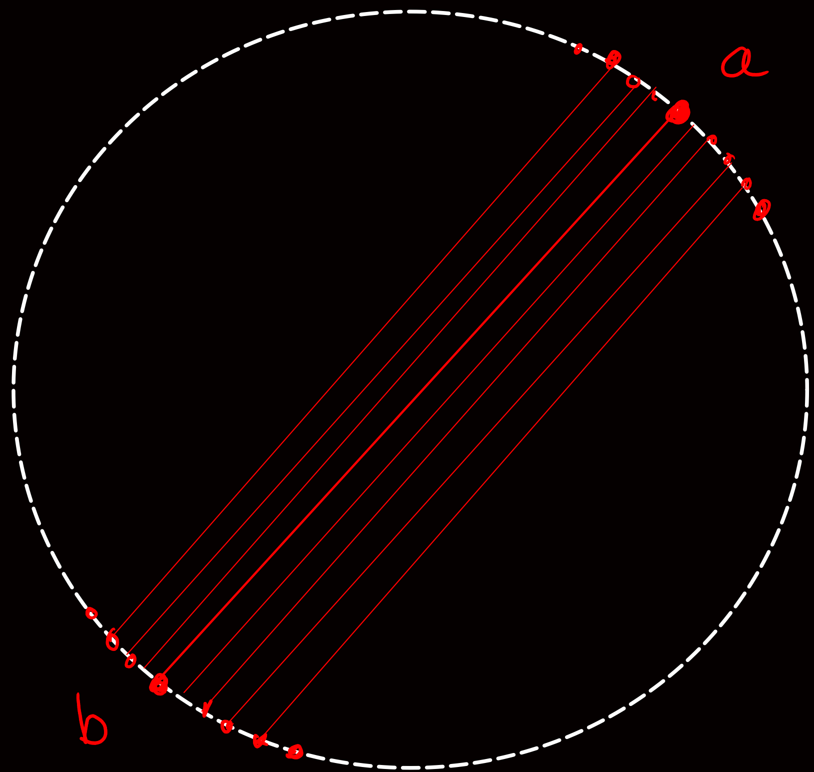
les feuilletages ne sont pas transverses.

nous avons une réponse complète à cette question,

mais elle est compliquée...

je l'énonce dans un cadre où elle est plus simple.

On se limite aux familles A et B qui vérifient la propriété suivante :



toute paire $\{a, b\}$ de A est accumulée des 2 côtés par des paires de A (même chose pour B)

On dit que A est régulière si :

- les paires de A ne se croisent pas
- toute paire de A est accumulée des deux côtés par des paires de A

Théorème : A et B deux familles régulières,

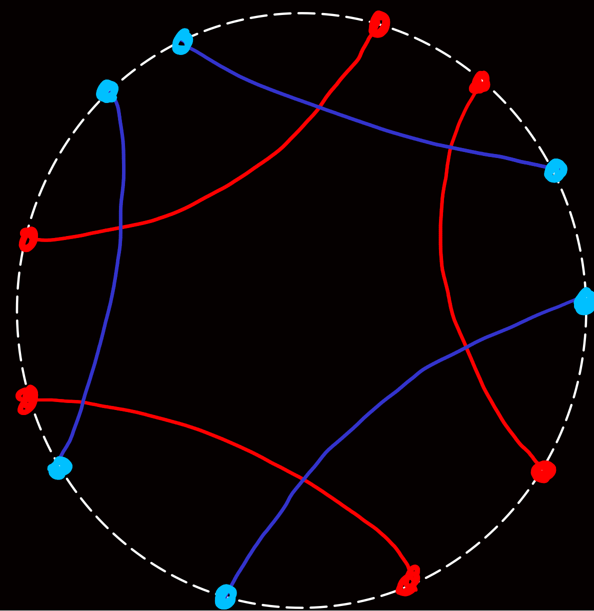
Il existe F et G deux feuilletages transverses du disques tels que :

pour toute paire $\{a, b\}$ de A il existe une feuille de F qui va de a à b

pour toute paire $\{c, d\}$ de B il existe une feuille de G qui va de c à d

si et seulement si :

- A et B sont disjointes
- il n'existe pas de "cycle"



le fait que les cycles sont une obstruction est classique.

Notre travail montre que c'est la seule obstruction.

La preuve est longue, et non élémentaire.

A quoi cela sert tout ça ?

→ video de la « machine Anosov » de R. Mc Kay.

. C'est un système mécanique, chaotique,
« parfaitement chaotique »

les systèmes parfaitement chaotiques sont dit Anosov.

- à un système Anosov sont associés
2 feuilletages transverses du plan ...

- nos résultats permettent de faire l'étude sur le cercle, ce qui est plus simple.

Merci de votre attention

Des questions ?